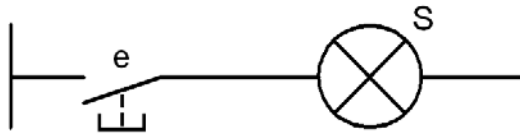


Les fonctions logiques

I- Généralités sur l'algèbre binaire (ou algèbre de Boole).



Les variables **e** et **S** sont des variables binaires. Elles ne peuvent prendre que deux états : «0» et «1».

On appelle la variable **e** : variable d'entrée (organe de commande).

On appelle la variable **S** : variable de sortie (organe commandé).

II- Fonctions logiques de base.

Fonction	Schéma développé	Table de vérité	Equation	Symbole EU	Symbole USA															
OUI NON inverseuse		<table><tr><th>e</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	e	S	0	0	1	1	$S = e$											
e	S																			
0	0																			
1	1																			
NON Inverse inverseuse		<table><tr><th>e</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	e	S	0	1	1	0	$S = \bar{e}$											
e	S																			
0	1																			
1	0																			
ET AND		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	$S = e_1 \cdot e_2$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	0																		
0	1	0																		
1	1	1																		
1	0	0																		
OU OR		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	$S = e_1 + e_2$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	0																		
0	1	1																		
1	1	1																		
1	0	1																		

III- Représentation d'une équation logique.

3-1. But

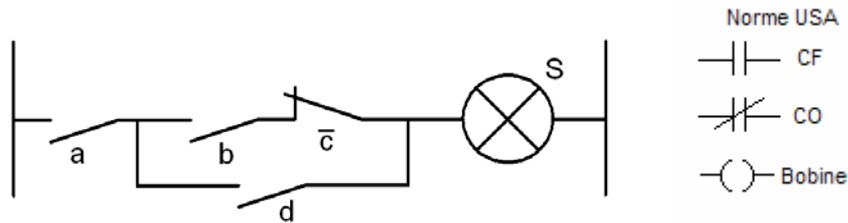
Préparer :

- le câblage de la partie commande
- ou la programmation d'un API (Automate Programmable Industriel)

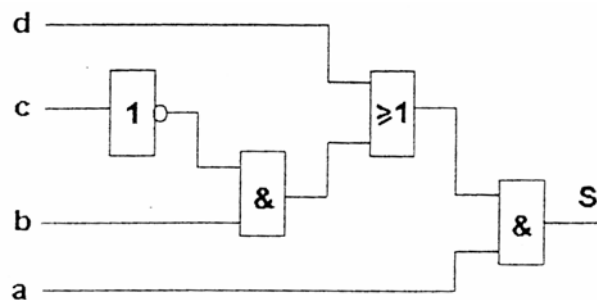
3-2. Familles d'outils

Soit l'équation : $S = a \cdot (b \cdot \bar{c} + d)$

a) Schéma à contacts. (Electricité)



b) Logigramme. (Electronique ou Pneumatique)

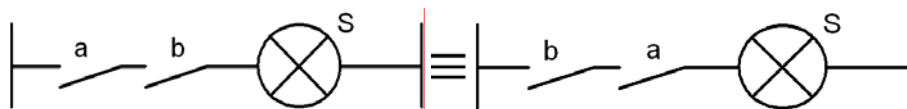


IV- Propriété de l'algèbre de Boole.

4-1. Propriété de commutativité.

a)Produit logique.

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



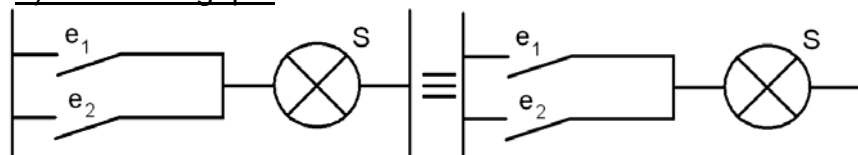
$$S = a \cdot b$$

identique à $S = b \cdot a$

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

e ₁	e ₂	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b) Somme logique.



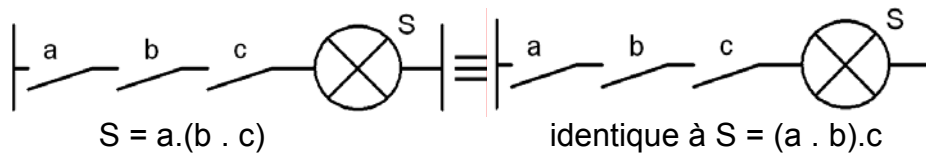
$$S = a + b$$

identique à $S = b + a$

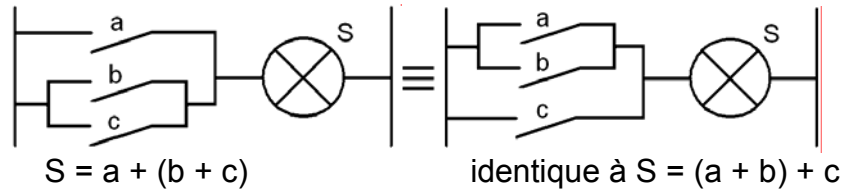
e ₁	e ₂	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4-2. Propriété d'associativité.

a) Produit logique.



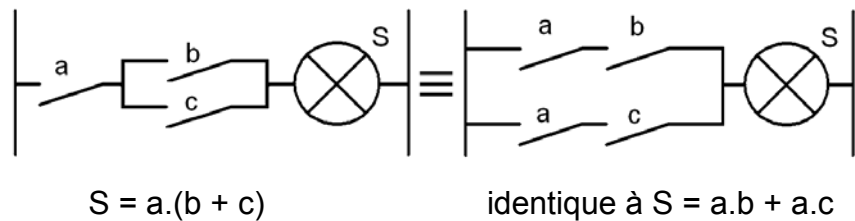
b) Somme logique.



4-3. Propriété de distributivité.

a) Distributivité du produit par rapport à la somme.

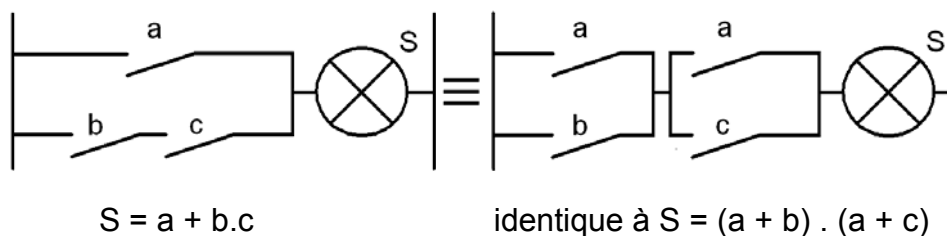
a	b	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



a	b	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b) Distributivité de la somme par rapport au produit.

a	b	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

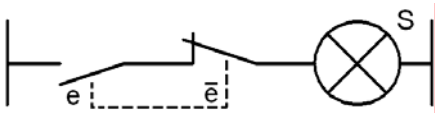
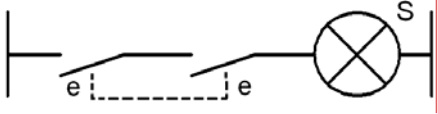


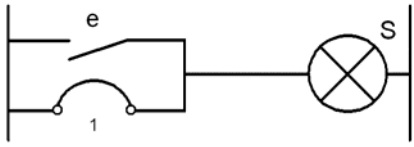
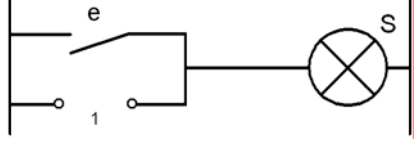
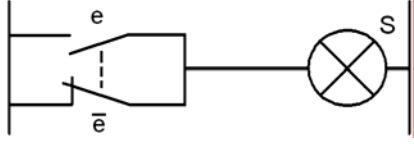
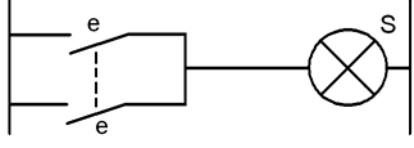
a	b	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Attention cette distributivité est interdite en algèbre classique !

4-4 Identités remarquables.

Fonction	Représentation électrique	e	S	Equation
ET		0	0	$e . 1 = e$
		1	1	
		0	0	$e . 0 = 0$
		1	0	

	0	0	$e \cdot \bar{e} = 0$
	1	0	
	0	0	$e \cdot e = e$
	1	1	

Fonction	Représentation électrique	e	S	Equation
OU		0	1	$S = e + 1 = 1$
		1	1	
		0	0	$S = e + 0 = e$
		1	1	
		0	1	$S = e + \bar{e} = 1$
		1	1	
		0	0	$S = e + e = e$
		1	1	

Remarques :

- Pas d'exposants : $a \cdot a = a$.
- Pas de coefficients : $a + a = a$.

V- Théorèmes de De Morgan.

5-1. Premier théorème.

Le complément d'une somme logique est égal au produit logique des termes complémentés de cette somme.

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

5-2. Deuxième théorème.

Le complément d'un produit logique est égal à la somme logique des termes complémentés de ce produit.

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

5-3. Remarque.

Toute double complémentation d'une variable entraîne la simplification suivante :

$$\overline{\overline{a}} = a$$

De sorte que :

$$\overline{\overline{a}} = a$$

et

$$\overline{\overline{\overline{a}}} = \overline{a}$$

5-4. Conclusion.

Pour compléter une équation ou une fonction, il suffit :

- de remplacer chaque terme par son complément ;
- de remplacer chaque signe + par un signe . et réciproquement.

VI- Fonctions logiques secondaires.

Fonction	Schéma développé	Table de vérité	Equation	Symbole (E.U)	Symbole USA															
NOR (Non Ou)		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	$S = \overline{e_1 + e_2} = \overline{e_1} \cdot \overline{e_2}$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	1																		
0	1	0																		
1	1	0																		
1	0	0																		
Nand (Non ET)		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	$S = \overline{e_1 \cdot e_2} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	1																		
0	1	1																		
1	1	0																		
1	0	1																		
OU Exclusif XOR		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	$S = (\overline{e_1} \cdot e_2) + (e_1 \cdot \overline{e_2})$ $= e_1 + e_2$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	0																		
0	1	1																		
1	1	0																		
1	0	1																		
XNOR		<table><tr><th>e₁</th><th>e₂</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	e ₁	e ₂	S	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	$S = (\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) + (e_1 \cdot e_2)$		
e ₁	e ₂	S																		
0	0	1																		
0	1	0																		
1	1	1																		
1	0	0																		

VII- Universalité des fonctions logiques NAND et NOR

Toutes les expressions booléennes se résument à différentes combinaisons des opérations élémentaires *ET*, *OU* et *NON*. C'est pourquoi, la matérialisation de toute expression logique est faisable en ne recourant qu'à des portes logiques NAND ou NOR judicieusement câblées et regroupées.

FONCTION OU		Deux opérateurs OU – NON	Trois opérateurs ET – NON
FONCTION ET		Trois opérateurs OU – NON	Deux opérateurs ET – NON
FONCTION OU - NON		Quatre opérateurs ET - NON	
FONCTION ET – NON		Quatre opérateurs OU - NON	

Remarque :

